Exercices Série 13

1) Trouver l'intersection entre
   - la droite D parallèle au vecteur $\vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. et passant par le point $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et
   - le plan Π contenant les trois points $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2) Trouvez l'équation de la droite correspondant à l'intersection du plan Π du point 1) et du plan horizontal (défini par $x_3 = 0$).

Réponses

1) Les équations paramétriques de la droite D donnent le système suivant :

$$\begin{cases} t = \dfrac{p_1 - 1}{4} \\ t = \dfrac{p_2 - 5}{2} \\ t = \dfrac{p_3 - 2}{3} \end{cases}$$

L'équation cartésienne du plan Π se trouve en résolvant le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} -\alpha + 2\beta + \delta = 0 \\ 2\alpha + 2\beta - 2\gamma + \delta = 0 \\ 4\alpha + 2\beta + 3\gamma + \delta = 0 \end{cases}$$

Le système ci-dessus donne les relations suivantes :

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -\dfrac{1}{2}\delta \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Donc, il s'agit du plan $p_2 - 2 = 0$ ou, autrement dit, le plan vertical $p_2 = 2$.

L'intersection de Π et D est donc un point $I = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}$ qui est à la fois dans le plan Π (donc $\mathrm{i}_2 = 2$) et sur la droite D, donc $I = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Nous savons par les équations paramétriques de la droite que $t = \frac{i_2 - 5}{2} = -\frac{3}{2}$ (car $i_2 = 2$ vue que $I \in \Pi$).

En remplaçant, cela donne donc $I = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2.5 \end{pmatrix}$.

2) Nous cherchons l’ensemble des points qui satisfait à la fois l’équation cartésienne du plan Π => $x_2 = 2$ et celle du plan $x_3 = 0$.
Tout point P sur la droite est donc défini par les deux contraintes

$$\begin{cases} p_2 = 2 \\ p_3 = 0 \end{cases}$$

Il s’agit donc de l’axe x_1 !